利廻り特殊算出法

北條時重

利廻りとは資本增加の割合を云ひ、實際經濟問題として重要なるものにして、此處に年金及債券の利廻り算出法を論ぜんとするものなるが、其算式に於て利廻りの高次式を含み、其完全解を得る事は一般に不可能とせらるゝものなれ共、其近似値を求むる方法は古來より幾多研究されつゝありて、此處に利息算として興味深き點と云ふべく本稿に於て其一般に知られざる方法に就て述べんとす。

一　ベーリー氏の年金利廻り算出一般方法（註一）

此處にm年据置後n年繼續の毎期單位支拂高に對する年金現價算式は利廻りをi、其年金現價をaとすれば

$$a = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-m} \qquad \cdots\cdots(1)$$

にして之より利廻りを求めんとす。(1)式の分母を拂へば

$$ai = (1+i)^{-m}-(1+i)^{-(m+n)} \qquad \cdots\cdots(2)$$

右邊を二項級數に展開しiの昇冪の順序に整列して後兩邊をniにて除すれば

$$\frac{a}{n}=1-(2m+n+1)\frac{i}{2}+(3m^2+3mn+n^2+6m+3n+2)\frac{i^2}{6}\cdots\cdots\cdots$$

上式右邊の第二項の i の係數を單位ならしむるため次の如く兩邊を $-2/(2m+n+1)$ 乘すれば

$$\left(\frac{a}{n}\right)^{-2/(2m+n+1)}=\left[1-(2m+n+1)\frac{i}{2}\right]^{-2/(2m+n+1)}$$

$$-\frac{2}{2m+n+1}\left[1-(2m+n+1)\frac{i}{2}\right]^{-2/(2m+n+1)-1}$$

$$\times(3m^2+3mn+n^2+6m+3n+2)\frac{i^2}{6}+i\text{の三次以上の項}$$

$$=1+i-\frac{n^2-1}{12(2m+n+1)}i^2+\cdots\cdots\cdots$$

此處に於て

$$\left(\frac{a}{n}\right)^{-2/(2m+n+1)}-1=h\cdots\cdots\cdots(3)$$

として上式に代入し i の三次以上の項を省畧すれば

$$h=i-\frac{n^2-1}{12(2m+n+1)}i^2$$

之より下式を得べし

$$i=h\div\left\{1-\frac{n^2-1}{12(2m+n+1)}i\right\}\cdots\cdots\cdots(4)$$

次に第一階、二階、三階等の利廻り近似値を

i_1, i_2, i_3,

とすれば

$$i_1 = h$$

之を(4)式に代入すれば

$$i_2 = h \div \left\{1 - \frac{n^2-1}{12(2m+n+1)}h\right\}$$

更に之を(4)式に代入して分母を拂ひ整理すれば

$$i_3 = \frac{12(2m+n+1)-(n^2-1)h}{12(2m+n+1)-2(n^2-1)h}h \quad\text{......(5)}$$

是求むる「ベーリー」氏一般式なるが特別の場合として据置期間なき普通年金現價より利廻りを求むる算式は上式に於て$m=0$とすれば可なり。即

$$i = \frac{12-(n-1)h}{12-2(2n-1)h}h \quad\text{......(6)}$$

但し $h = \left(\frac{n}{a}\right)^{2/(n+1)} - 1$

算例(一)拾年間据置貳拾年間繼續毎年末單位支拂金に對する年金現價九、四五〇五に對する利廻りを求む。

算式(5)に於て $m = 10$, $n = 20$, $a = 9.4505$

$$h = \left(\frac{10}{9.4505}\right)^{2/41} - 1$$

$$\log(h+1) = \frac{2}{41}\log\left(\frac{10}{9.4505}\right) = 0.1588172 = \log 1.0372459$$

$$h = .0372459$$

$$i = \frac{12\times41 - 399h}{12\times41 - 798h}h = .0384433$$

利廻眞値(小數第六位迄) i =、〇三八四三七に對し其差僅かに、〇〇〇〇〇六にして正確に近き値が得らるべき算式と云ふべし。

算例(二)貳拾年間繼續毎年末單位支拂金の普通年金現價一三、七八〇四に對する利廻りを求む。

算式(6)に於て　$n = 20,\quad a = 13.7804$

$$h = \left(\frac{n}{a}\right)^{2/21} - 1 = .0361115$$

$$i = \frac{12 - 19h}{12 - 38h}h = .0384428$$

利廻り眞値(小數第六位迄) i =、〇三八四三七との差僅かに小數第六位に六あるのみなり。

二　第二法(年金算式直接解法)(註二)

普通年金現價算式(記號前述の如し)

$$a = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

に於て　$1+i=x$　として分母を拂へば

$$a\,x^{n+1}-(a+1)\,x^{n}+1=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

なる算式を得べし。之より x を求めんに次の如き代入法を施せば

$$t = x\sqrt[n+1]{a} \quad\cdots\cdots(2)$$

之を(1)式に代入すれば

$$t^{n+1}-(a+1)\,t^{n}\,a^{-n/(n+1)}+1=0$$

兩邊を t^n にて除し更に

$$r = a^{n}(a+1)^{-(n+1)} \quad\cdots\cdots(3)$$

とすれば上式は

$$t\left\{1+t^{-(n+1)}\right\} = r^{-1/(n+1)}$$

兩邊の對數をとり

$$\log t^{-(n+1)} = \mathrm{A} \qquad \log\left(1+t^{-(n+1)}\right) = \mathrm{B} \quad\cdots\cdots(4)$$

とすれば上式は簡單に次の如くなるべし。

$$-\mathrm{A}+(n+1)\,\mathrm{B} = -\log r \quad\cdots\cdots(5)$$

上式に於て r は既知數にして、Bは A を與ふる事に依りて定められ、從つて上式が成立する如く豫め作製されある下表を用ひて A の近似値を求め得べく、從つて之より利廻を算出し得べし。

−A	B	−A	B
2.0	.004	1.5	.014
1.9	.005	1.4	.017
1.8	.007	1.3	.021
1.7	.009	1.2	.027
1.6	.011	1.1	.033

然るに年金繼續年數相當長期の場合にBの値はAに比し極めて小にして（證明省畧）Aの概算値として

$$A = \log r \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

として此値の近似値（小數二位未滿切捨）を(5)式に代入して其式を滿足せしむるAの近似値を求め以つて利廻りを算出しても可なり。

算例（三）前述例（二）を採用するときは即

$n = 20 \qquad a = 13.7804$

之を(3)式に代入すれば

$$-\log r = (n+1)\log(a+1) - n\log a = 1.7778174$$

前述の表により或は(6)式よりAの概算値 -1.7 なるを知る之より次表を得べし。

$-$ A	$-$A+(n+1)B
1.7	1.889
1.6	1.831
1.5	1.794
1.4	1.757

之に依つて

$-$ Aの近似値 = 1.5

なるを知り得べし依つて更に次表を作製し得べし。

$-$ A	B	$-$A+(n+1)B
1.49	.0138, 309	1.780, 449
1.48	.0141, 478	1.777, 106

之を比例部分法により

$$\mathrm{A} = log\, t^{-21} = -1.49 + \frac{22.75}{3343} = \bar{2}.51681$$

$$log\, x^{-21} = \mathrm{A} + log\, a = \bar{2}.51681 + 1.13926 = \bar{1}.65607$$

$log.\,x = .0163776$

$x = 1 + i = 1.038431$　　$i = .038431$

利廻り眞値、〇三八四三七との差僅かに小數第六位に於て六のみにして、更に此方法を繰返すときは

$-A$	B	$-A+(n+1)B$
1.484	.0140,202	1,778,424
1.483	.0140,521	1.778,094

$$A = log\,t^{-21} = -1.484 + \frac{.250}{330} = \bar{2}.516758$$

$$log\,x^{-21} = \bar{2}.516758 + 1.139262 = \bar{1}.656020$$

$$log\,x = .0163800$$

$x = 1 + i = 1.0384366$　　$i = .0384366$

利廻り眞値、〇三八四三六八との差僅かに小數七位に二あるのみにして極めて精確なる結果と云ふべし。本法は「ベーリー」氏算法の如く與へられたる關係式の展開によりて近似式を求めたるに反し算出基礎式(5)は近似式にあらずして之より一層精確なる値を算出し得る特長を有す。尚本法は前法と比較のため年金現價に付き述べたるも年金終價・年賦金・積立金・其他與へらるゝ當初の關係式の簡單なるものに適用して便なる方法なり然れ共本法を債券利廻に付其算式を研究せるも其得たる結果は良好なれ共當初の關係式稍々複雜のためそれより求めたる算式

も徒らに繁雑となり實用に適せず。

三 「ニユウトン」氏法

普通年金現價算式

$$a = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \cdots\cdots(1)$$

に於て $i=r+h$ とし「ニユウトン」氏法を適用すれば下式を得べし。

$$h = -\frac{1-(1+r)^{-n}-ar}{n(1+r)^{-(n+1)}-a} \quad \cdots\cdots(2)$$

説明(1)式より分母を拂ひ移項すれば

$$f(i)=1-(1+i)^{-n}-ai=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

$i=r+h$ として「テーラー」の定理により展開すれば

$$f(r+h)=f(r)+hf'(r)+\frac{h^2}{2}f''(r+xh)=0 \qquad 0<x<1$$

左邊の h の二次の項を省畧すれば

$$f(r)+hf'(r)=0$$

$$h=-\frac{f(r)}{f'(r)}=-\frac{1-(1+r)^{-n}-ar}{n(1+r)^{-n-1}-a}$$

本法に於ける利廻り算式(2)は比較的簡單にして且之より算出せる年金利廻りは前法に劣らざる結果を得べし。本法は與へられたる關係式より得らるべき函數の透導函數が簡單なる場合に限り應用せらるべきものにして債劵利廻の如き場合には算式複雜となり實用に適せず。

（此場合其簡便法あれ共好結果を得ず此處に省畧す）

算例(四)前述算例(二)を用ふれば即

$n=20 \qquad a=13.7804$

第一階利廻り概算値を四分(年金表其他によりて)とすれば算式(2)により

$$h=-\{1-(1+.04)^{-20}-13.7804\times .04\}\div\{20(1+.04)^{-21}-13.7804\}$$

$$=-.00152$$

$$i_1=.04-.00152=.03848$$

第二階利廻り概算値を三分八厘四毛とすれば

$r=.0384 \qquad h=.0000369$

$$i_2=.0384369$$

眞値、〇三八四三六八との差小數第七位にあるのみなり。

四　定限差挿入法

此方法は種々の與へられたる表、例へば利息表・對數表等の助により其要求する中間値を求むる方法にして前述の算式により直接求むる方法よりも詳細なる表を用ふれば一層精確なる値が得らるべ應用範圍極めて廣き實用價値大なるものなり。

其方法種々あれ共吾人は主として中央定限差法の應用を論ぜんとするのであるが順序として從來知られてるニユウトン氏定限差法の應用に付き概畧を述べ前者と比較對照せんとするのである。

（一）「ニユウトン」氏限定差法

與へられたる年金現價債券價格等を y とし其等の表によりて最も近き値を y_0 とし次に y_0 を挾みて

$$y_{-2},\quad y_{-1},\quad y_0,\quad y_1,\quad y_2,\cdots\cdots$$

なる數列を得べし。次に

$$y_0 - y_{-1} = \triangle y_{-1} \qquad y_1 - y_0 = \triangle y_0 \qquad y_2 - y_1 = \triangle y_1$$

$$\triangle y_0 - \triangle y_{-1} = \triangle^2 y_{-1} \qquad \triangle y_1 - \triangle y_0 = \triangle^2 y_0 \cdots\cdots$$

なる如き定限差畧記號を用ふるときは次の如き表を得べし。

（之を定限差表と名づくべし）

y_{-1}			
	Δy_{-1}		
y_0		$\Delta^2 y_{-1}$	
	Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$
y_1		$\Delta^2 y_0$	
	Δy_1		$\Delta^3 y_0$
y_2			

次に表差をhとし利廻り近似値をr_0とすれば

$$i = i_0 + x$$

此利廻りi、i_0に對する年金現價債券價格等の値をy、y_0とし $\frac{x}{h} = t$ とすれば

$$y = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \cdots\cdots$$

是即「ニュウトン」氏定限差挿入法式として知らるゝものなり。上式の第四項以降を切捨つるときは（$\Delta y_0 = \Delta$　$\Delta^2 y_0 = \Delta^2$と署記す）

$$\frac{\Delta^2}{2}t^2 + \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2}\right)t + y_0 - y = 0 \cdots\cdots\cdots(1)$$

上式よりtを算出すれば

$$t = \frac{x}{h} = \left(\triangle - \frac{\triangle^2}{2}\right) \div \left\{\frac{\left(\triangle - \frac{\triangle^2}{2}\right)^2}{y - y_0} + \frac{\triangle^2}{2}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

更に上式を簡畧すれば

$$t = \frac{x}{h} = \left(1 + \frac{\triangle^2}{2\triangle}\right) \div \left\{\frac{\triangle}{y - y_0} + \frac{\triangle^2}{2\triangle}\right\} \quad \cdots\cdots(3)$$ 註(三)

是等は即「ニユウトン」氏挿入法を利廻りに應用せる算式なり。

(二) 中央定限差法

本法は前述「ニウトン」氏法より更に精密なる値を與ふるものにして實際計算に廣く用ひらるゝ方法なり。前述の如き畧記號を用ふるときは

$$y = (1 - t)y_0 + ty_1 - \frac{t(1-t)}{2} \quad \frac{\triangle^2 y_{-1} + \triangle^2 y_0}{2}$$

是「ニウトン」氏定限差式より導ける「エベレット」の中央定限差畧式なり。(説明畧す)

上式より利廻り算出に一層便宜なる算式を透導せんに、上式に於て

$$\triangle y_0 = \triangle \qquad \triangle^2 y_{-1} + \triangle^2 y_0 = \triangle^2$$

なる略記號を用ふれば

$$y = y_0 + \left(\triangle - \frac{\triangle^2}{4}\right)t + \frac{\triangle^2}{4}t^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

第一階概算値として上式の第三項を省略すれば

$$t = (y - y_0) \div \left(\triangle - \frac{\triangle^2}{4}\right)$$

之を上式(4)に代入して整理すれば次の第二階近似値を得べし。

$$t = \frac{x}{h} = \left(\triangle - \frac{\triangle^2}{4}\right) \div \left\{ \frac{\left(\triangle - \frac{\triangle^2}{4}\right)^2}{y - y_0} + \frac{\triangle^2}{4} \right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

上述の(4)、(5)が中央定限差法による利廻り算式なり之等の兩式は前法の(1)、(2)、(3)式に比し何れも非常に精密なる結果を得べし。

算例(五)二十年後償還の五分利債券價格額面百に對し九八なりと云ふ其利廻りを求む。

債券價格算式は

A＝債券價格　　g ＝債券利子　　a ＝年金現價

C＝償還金額　　i ＝債券利廻

$$\frac{C - A}{C} = K = (i - g)a \qquad a = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

に依りて利廻りを定限差法によりて求めんとす。

先づ一般によく知られたる債券利廻り概算式

$$i=\left(g+\frac{k}{n}\right)\div\left(1-\frac{k}{2}\right)$$

に依りて本例の數値を代入して利廻り概算値五分一厘五毛强を得べし。依つて利息表より下表を得べし。

i	a	$i-g$	k	$\triangle$	$\triangle^2$
.045	13.00794	−.005	.0650397	+.0650397	−.0052878
.050	12.46221	0	0	+.0597519	−.0048046
.055	11.95038	+.005	.0597519	+.0549473	
.060	11.46992	+.010	.1146992		

（一）「ニュウトン」氏定限差法に依つて上表より算出すれば

(1) 式より　$24023t^2-621542t+200000=0$

$$t=\frac{x}{.005}=.325884$$

$x=.00162942$　　　$i=.05+x=.05162942$

(2) 式より　$x=.005\times(5.97519+.24023)\div\left\{\frac{(5.97519+.24023)^2}{2}-.24023\right\}=.00162916$

$i=.05+x=.05162916$

(3) 式より　$x = .005 \times \left(1 - \frac{.24023}{5.97519}\right) \div \left(\frac{5.97519}{2} - \frac{.24023}{5.97519}\right) = .00162821$

$i = .05 + x = .05162821$

(二)　中央定限差法に依つて上表より算出すれば左の如し。

(4) 式より　$25231t^2 - 622750t + 200000 = 0$

$t = \frac{x}{.005} = .325449$　　$i = .05 + x = .05162724$

(5) 式より　$x = 0.005 \times (5.97519 + .25231) \div \{.5 \times (5.97519 + .25231)^2 - .25231\}$

$= .00162695$　　$i = .05 + x = .05162695$

孰れも眞値、〇五一六二七〇七に近きも(5)式に依る方法最も近きを知るべし。

註(一)　H. Charlon; Théorie Mathématique des Operation Financiéres.

註(二)　H. Bioggi; Versicherungs Mathematik.

註(三)　原口亮平氏著　高等利息算