商工經濟研究 第十四卷第一號（昭和十四年二月十五日發行）

週期檢出方法及び本邦降雨量の週期

北條時重

目次

第一　序說

一般に時の經過と共に變動する自然現象或は經濟現象の系列即ち所謂時系列が週期的に一定の波動的變化を爲すものなるや否やは甚だ興味ある問題であるが、それに就いては其等の時系列に關係ある諸種の事情を斟酌して愼重なる研究を爲さざるべからず。之れ現今經濟方面に於て景氣循環理論として諸學者の大いに研究されつゝある處である。

かの太陽の黑點が約拾壹年の週期を以つて變動しつゝあるはよく知られてゐることであるが、自然現象たる降雨量が此の太陽の黑點に影響されるものと假定すれば、降雨量も同樣に一定の週期を以つて週期的に變化を爲すことが統計的に實證されるであらう。若し降雨量の變化或は日照の變化が週期的變動を爲すならばそれに密接なる關係にある農作物收穫高も又同樣に週期的に變化し、それに伴ひ其等の農作物の價格も波動的變動を爲すであらう。之等のことに就いて米國のヘンリー・エル・ムウア教授（Prof. Henry. L. Moore）が Economic Cycle. Their law and Cause なる著述に於て興味ある研究を發表してゐる。彼はシュスター（Schuster）氏の週期檢出の方法に依り米國オハイオ流域の七拾二箇年の毎年の年降雨量が八年と三十三年の週期を有して變動することを統計的に實證し、之れを根據として農作物收穫高及び其等の價格の變動に就いて論じてゐる。

我が國に於ける年降雨量の變化が如何なる週期を以つて變動するや。近年東北地方、阪神地方に於いて大雨に因る田畑の浸水、建築物の倒潰等多大の損害を惹起せしめたること、吾人の未だ生々しき記憶として存する處で

ある。かゝる降雨量の他、地震、潮の滿干等の自然現象の週期的變動、更に轉じて經濟的方面に於ける就業率、生産數量指數、其の他の一般景氣指數等の年々の變化が如何なる週期的波動を爲すやを研究することは極めて重要なることである。

斯くして吾々は本稿に於て先づ主なる代表的二つの週期檢出方法の理論即ちシュスター氏の調和解析に依る振幅の平方に基く週期檢出方法と相關比に基く週期檢出方法の理論を述べ更に本邦として東京地方及び四國多度津地方の年降雨量の週期を同地測候所發表の資料に基き統計的に檢出し以つて本邦降雨量の週期を推定せる筆者の研究結果を此處に發表しよう。之等の兩地方をとれるは東京地方に於て實に六十二箇年の長期に亘る資料が得られたること、我が國に於ける中央都市たる關係上、又多度津地方は四十五箇年の資料のみ得られざるも二つの資料に依る週期檢出の結果が一致するや否やを調べたき爲めである。之等の研究結果が多少とも社會、經濟學を學ぶ諸子及び實際家の參考資料たり得ば筆者の誠に幸とする處である。

吾人は週期檢出方法の理論を述べる前に先づ其の前驅として週期的函數をフーリエ級數（Fourier Series）にて表す所謂調和解析（Harmonic analysis）に就いて論じなければならない。

第二　調和解析

（一）單弦運動の式

週期的函數をフーリエ級數にて表現する調和解析を述べる順序として先づ簡單なる單弦運動の式に就いて述べ

よう。

此處に一點Pが半經aなる圓周上を等速度を以つて動くものとする。即ちP點は等しい時間に等しい長さの孤を通過する。從つてP點の畫く孤の長さは時間に比例するものとす。P點は當初其の圓周上中心Oに於て横軸とeなる中心角をなす點にありて其處より出發するものとする。此のe角を始期角或は位相（Phase）と稱す。此の圓の半經aが此の運動の振幅（Amplitude）にして圓を一周するに要する時間を此の運動の週期と稱す。P點が横軸に下せる垂線の長さPM（y）が各時點に於ける單弦運動（Simple Harmonic motion）の高さを表すのである。

今直角座標の横軸に時間をとり、縦軸に各時點に於ける上記單弦運動の高さをとり畫けるグラフが此の單弦運動を示す正弦曲線である。

次に此の單弦運動の示す正弦曲線の方程式を記せば

$$PM = y = a\mathrm{Sin}(gt + \mathrm{e})$$

但しtは時間、eは始期角、gはラヂアンを單位とせる單位時間の角速度である。

註　ラヂアンは圓の半徑に等しい弧に對する中心角（AOB）を單位として測つた角の單位にして一ラヂアンを普通の角（AOB）にて表せば

$$\frac{\text{角AOB}}{\text{4直角}} = \frac{\text{弧AB}}{\text{圓周}} = \frac{\mathrm{r}}{2\pi\mathrm{r}} = \frac{}{2\pi}$$

∴ 角AOB=360度÷(2π)=57度18分

即ち一ラヂアンは普通の角で表せば五七度十八分である。

上記の單弦運動を示す式は又次の形で表される。

$$y=A\ \mathrm{Sin}\ qt+B\ \mathrm{Cos}.\ qt$$

但し $A=a\ \mathrm{Cos}\ c,\ B=a\ \mathrm{Sin}\ c$

單弦運動は物理的現象に極めて重要なるものにして、かの兩端より張れる糸の振動の際或る時間に於ける振れの高さの變化は單弦運動を成し、地震の上下振動の高さの變化は數箇の單弦運動の合成されたものと看做さる。

(二) フーリエ級數

一般に週期的變動をなす時系列は上記の單弦運動の式の組合はされた次の如き級數にて表現される。

$$y=a_0+a_1\ \mathrm{Cos}x+a_2\ \mathrm{Cos}2x+\cdots\cdots+a_r\ \mathrm{Cos}rx+\cdots\cdots$$
$$+b_1\ \mathrm{Sin}x+b_2\ \mathrm{Sin}2x+\cdots\cdots+b_r\ \mathrm{Sin}rx+\cdots\cdots$$

斯如き級數をフーリエ級數と謂ひ、$a_0,\ a_1,\ a_2,\cdots\cdots b_1,\ b_2,\cdots\cdots$をフーリエ級數の係數と謂ふ。

一般に與へられたる函數をかゝる級數にて表すことをフーリエ解析或は調和解析と謂ふ。吾々は應用の場合に函數を有限項數の三角函數の項の和として近似的に表さんとするのである。

依つて吾々は先づ與へられたるxの函數uを有限項數のフーリエ級數にて表すことに就いて述べよう。

$$u(x) = a_0 + a_1\,\mathrm{Cos}x + a_2\,\mathrm{Cos}2x + \cdots\cdots + a_r\,\mathrm{Cos}rx$$
$$+ b_1\,\mathrm{Sin}x + b_2\,\mathrm{Sin}2x + \cdots\cdots + b_r\,\mathrm{Sin}rx \qquad (1)$$

而して

x が $0,\ \frac{2\pi}{n},\ \cdots\cdots,\ \frac{2(n-1)}{n}\pi$ なるとき

u は $u_0,\ u_1,\ \cdots\cdots,\ u_{n-1}$ なる値をとるとし

$n > 2r$ とす。

即ち吾々は x が $0, \frac{2\pi}{n}, \cdots\cdots, \frac{2(n-1)}{n}\pi$ なるとき u のとる値 $u_0, u_1, \cdots\cdots, u_{n-1}$ なる n 箇の値に出來るだけ近く $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_r$ なる $(2r+1)$ 箇の常數を決定せんとするのである。

上式(1)から

$$u_0 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_r$$

$$u_1 = a_0 + a_1\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{n} + a_2\,\mathrm{Cos}\frac{2.2\pi}{n} + \cdots\cdots + a_r\,\mathrm{Cos}\frac{r.2\pi}{n}$$
$$+ b_1\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{n} + b_2\,\mathrm{Sin}\frac{2.2\pi}{n} + \cdots\cdots + b_r\,\mathrm{Sin}\frac{r.2\pi}{n}$$

$$u_2 = a_0 + a_1\,\mathrm{Cos}\frac{2.2\pi}{n} + a_2\,\mathrm{Cos}\frac{4.2\pi}{n} + \cdots\cdots + a_r\,\mathrm{Cos}\frac{2r.2\pi}{n}$$
$$+ b_1\,\mathrm{Sin}\frac{2.2\pi}{n} + b_2\,\mathrm{Sin}\frac{4.2\pi}{n} + \cdots\cdots + b_r\,\mathrm{Sin}\frac{2r.2\pi}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1}=a_0+a_1\ \mathrm{Cos}\frac{(n-1)2\pi}{n}+a_2\ \mathrm{Cos}\frac{2(n-1)2\pi}{n}+\cdots\cdots+a_r\ \mathrm{Cos}\frac{r(n-1)2\pi}{n}$$
$$+b_1\ \mathrm{Sin}\frac{(n-1)2\pi}{n}+b_2\ \mathrm{Sin}\frac{2(n-1)2\pi}{n}+\cdots\cdots+b_r\ \mathrm{Sin}\frac{r(n-1)2\pi}{n}$$

之等の一聯の式より

$$u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_{n-1}$$
$$=n\ a_0+a_1\{1+\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{n}+\cdots\cdots+\mathrm{Cos}\frac{(n-1)2\pi}{n}\}$$
$$+a_2\{1+\mathrm{Cos}\frac{2.2\pi}{n}+\cdots\cdots+\mathrm{Cos}\frac{2(n-1)2\pi}{n}\}$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+a_r\{1+\mathrm{Cos}\frac{r.2\pi}{n}+\cdots\cdots+\mathrm{Cos}\frac{r(n-1)2\pi}{n}\}$$
$$+\cdots\cdots$$
$$+b_r\{\mathrm{Sin}\frac{r.2\pi}{n}+\cdots\cdots+\mathrm{Sin}\frac{r(n-1)2\pi}{n}\}$$

然るに三角法の公式より

$$1+\mathrm{Cos}\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{Cos}\frac{4k\pi}{n}+\cdots\cdots+\mathrm{Cos}\frac{2(n-1)k\pi}{n}=0$$
$$\mathrm{Sin}\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{Sin}\frac{4k\pi}{n}+\cdots\cdots+\mathrm{Sin}\frac{2(n-1)k\pi}{n}=0$$

依つて

$$u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_{n-1}=n\,a_0$$

之れが係數a_0に對する標準方程式である。

又上記一聯の式より

$$u_0+u_1\cos\frac{2\pi}{n}+u_2\cos\frac{2.2\pi}{n}+\cdots\cdots+u_{n-1}\cos\frac{(n-1)2\pi}{n}$$

$$=a_0\left\{1+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{2.2\pi}{n}+\cdots\cdots+\cos\frac{(n-1)2\pi}{n}\right\}$$

$$+a_1\left\{1+\cos^2\frac{2\pi}{n}+\cos^2\frac{2.2\pi}{n}+\cdots\cdots+\cos^2\frac{(n-1)2\pi}{n}\right\}$$

$$+a_2\left\{1+\cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2.2\pi}{n}+\cdots\cdots+\cos\frac{(n-1)2\pi}{n}\cos\frac{2(n-1)2\pi}{n}\right\}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+b_1\left\{\cos\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots\cdots+\cos\frac{(n-1)2\pi}{n}\sin\frac{(n-1)2\pi}{n}\right\}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

然るに三角法に依り上式右邊第二項のa_1に乘ぜる大括孤中の項が$\frac{n}{2}$にして他のa_0, a_2, a_3, $\cdots\cdots$, b_1, b_2, $\cdots\cdots$に乘ぜる大括孤中の項は總べて零であるから

$$u_0+u_1\cos\frac{2\pi}{n}+u_2\cos\frac{2.2\pi}{n}+\cdots\cdots+u_{n-1}\cos\frac{(n-1)2\pi}{n}=\frac{1}{2}n\,a_1$$

之れ係數 a_1 に對する標準方程式である。他の係數に對する標準方程式も同樣にして求め得べし。

斯くして係數 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_r, b_1, b_2, \cdots\cdots, b_r$ を次の式にて定むるを得べし。

$$a_0 = \frac{1}{n}\sum_{0}^{n-1} u_k$$

$$a_1 = \frac{2}{n}\sum u_k \operatorname{Cos}\frac{2k\pi}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_r = \frac{2}{n}\sum u_k \operatorname{Cos}\frac{2k\pi r}{n}$$

$$b_1 = \frac{2}{n}\sum u_k \operatorname{Sin}\frac{2k\pi}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_r = \frac{2}{n}\sum u_k \operatorname{Sin}\frac{2k\pi r}{n}$$

吾々は次に n=8 の場合に之等の係數を決定すべき簡便式を求めよう。

$$u(x) = a_0 + a_1 \operatorname{Cos} x + a_2 \operatorname{Cos} 2x + a_3 \operatorname{Cos} 3x$$
$$+ b_1 \operatorname{Sin} x + b_2 \operatorname{Sin} 2x + b_3 \operatorname{Sin} 3x$$

即ち $u_0, u_1, u_2, \cdots\cdots, u_7$ を與へて係數 $a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ を決定する簡便式を求めんとす。

今次の如き略記號を用ふるものとす。

$u_0+u_4=v_0$　　$u_0-u_4=w_0$

$u_1+u_5=v_1$　　$u_1-u_5=w_1$

$u_2+u_6=v_2$　　$u_2-u_6=w_2$

$u_3+u_7=v_3$　　$u_3-u_7=w_3$

$v_0+v_2=p_0$　　$v_0-v_2=q_0$

$v_1+v_3=p_1$　　$v_1-v_3=q_1$

$w_0=r_0$

$w_1+w_3=r_1$　　$w_1-w_3=s_1$

$w_2=r_2$

之れを實際上次の如き形式にて計算する

	u_0	u_1	u_2	u_3
	u_4	u_5	u_6	u_7
和	v_0	v_1	v_2	v_3
差	w_0	w_1	w_2	w_3

	v_0	v_1		w_0	w_1	w_2
	v_2	v_3			w_3	
和	p_0	p_1	和	r_0	r_1	r_2
差	q_0	q_1	差		s_1	

$$8a_0 = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 = p_0 + p_1$$

$$4a_1 = w_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}w_3 = r_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}s_1$$

$$4a_2 = v_0 - v_2 = q_0$$

$$4a_3 = w_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}w_3 = r_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}s_1$$

$$4b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 + w_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}r_1 + r_2$$

$$4b_2 = v_1 - v_3 = q_1$$

$$4b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}w_1 - w_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}r_1 - r_2$$

$n=8$ の場合の係數を計算するに直接前記の式より算出するよりも上記簡便式に依り算出する方が便なるべし。併し乍ら種々の n の場合に夫々各箇別の係數を計算するには其等の簡便式に依らずして直接に前記算式より定むる外なかるべし。

例　次の年降雨量の系列をフーリエ級数にて表せ。

年次 k	年降雨量※ u_k	$\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi}{8}k$	$u_k\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{8}k$	$\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{8}k$	$u_k\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{8}k$
0	1,595粍	Cos 0° = 1.000	1,595	Sin 0° = 0.000	0
1	1,393	Cos 45° = 0.707	985	Sin 45° = 0.707	985
2	1,455	Cos 90° = 0.000	0	Sin 90° = 1.000	1,455
3	1,570	Cos135° = −0.707	−1,110	Sin135° = 0.707	1,110
4	1,641	Cos180° = −1.000	−1,641	Sin180° = 0.000	0
5	1,560	Cos225° = −0.707	−1,103	Sin225° = −0.707	−1,103
6	1,607	Cos270° = 0.000	0	Sin270° = −1.000	−1,607
7	1,607	Cos315° = 0.707	1,136	Sin315° = −0.707	−1,136
計	12,428	—	−138	—	−296

※年降雨量を雨量計の高さにて示せるものである。

フーリエ級數を

$u(x) = A_0 + A_1\,\mathrm{Cos}x + B_1\,\mathrm{Sin}x$　とすれば上表より

$$A_0 = \frac{1}{n}\Sigma u_k = \frac{12428}{8} = 1,554$$

$$A_1 = \frac{2}{n}\Sigma u_k \ \mathrm{Cos}\frac{2\pi}{8}k = -\frac{138}{4} = -34.5$$

$$B_1 = \frac{2}{n}\Sigma u_k \ \mathrm{Sin}\frac{2\pi}{8}k = -\frac{296}{4} = -74.0$$

依つて求むる年降雨量のフーリエ級數は次の如くになるべし。

$$u(x) = 1,554 - 34.5\mathrm{Cos}x - 74\mathrm{Sin}x$$

別法　前述の係數計算簡便法に依れば

	1,595	1,393	1,455	1,570
	1,641	1,560	1,607	1,607
和	3,236	2,953	3,062	3,177
差	−46	−167	−152	−37

	3,236	2,953	−46	−167	−152
	3,062	3,177		−37	
和	6,298	6,130	−46	−204	−152
差	174	−224		−130	

$$8a_0 = 6{,}298 + 6{,}130 = 12{,}428, \qquad a_0 = 1{,}554$$

$$4a_2 = 174, \qquad a_2 = 43.5$$

$$4b_2 = -224, \qquad b_2 = -56$$

$$4a_1 = -46 - 0.707 \times 130 = -137.9, \qquad a_1 = -34.5$$

$$4a_3 = -46 + 0.707 \times 130 = 45.9, \qquad a_3 = 11.5$$

$$4b_1 = -204 \times 0.707 - 152 = -296.2, \qquad b_1 = -74.1$$

$$4b_3 = -204 \times 0.707 + 152 = 7.8, \qquad b_3 = 2.0$$

依つて與へられたる年降雨量をフーリエ級數にて表せば

$$u(x) = 1{,}554 - 34.5\mathrm{Cos}\,x + 43.5\mathrm{Cos}\,2x + 11.5\mathrm{Cos}\,3x$$
$$-74.1\mathrm{Sin}\,x - 56\mathrm{Sin}\,2x + 2\mathrm{Sin}\,3x$$

となるのである。

第三　週期解析

次に吾々は時系列より其の趨勢的變動を除去せる循環的變動を一定の週期と振幅と位相を以つて數學的に定め

んとす。換言すれば之等の三つの要素を以つて循環的變動を表現する方程式を定めんとするのである。かゝる数學的處理を週期解析（Periodic analysis）と稱せらる。

一定の時間例へば一箇年或は一箇月等を單位とせる整數 p を週期とする時系列を y とし、時間を t とすれば

$$t \quad 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ r,\ \cdots\cdots,\ p-1$$

$$y \quad y_0\ y_1,\ y_2\ \cdots\cdots,\ y_r\ \cdots\cdots,\ y_{p-1}\ (y_p = y_0)$$

更に　$\theta = \frac{2\pi}{p}t$　と置けば

$\theta = \frac{2\pi}{p}r$　のとき　$y = y_r$　となる。

而して θ は0から 2π 迄變化する値である。

今近似的に

$$y = A_0 + A_1 \operatorname{Cos}\theta + B_1 \operatorname{Sin}\theta \qquad (1)$$

と表せば前述の關係式より

$$A_0 = \frac{1}{p}\sum_0^{p-1} y_r, \quad A_1 = \frac{2}{p}\sum y_r \operatorname{Cos}\frac{2\pi}{p}r, \quad B_1 = \frac{2}{p}\sum y_r \operatorname{Sin}\frac{2\pi}{p}r \qquad (2)$$

なるを知るべし。又上式は

$$y = A_0 + R \operatorname{Sin}(\theta+\alpha) = A_0 + R \operatorname{Sin}\left(\frac{2\pi}{p}t + \alpha\right) \qquad (3)$$

となすを得べし。

但し　$R\ \mathrm{Sin}(\theta+\alpha)=R\ \mathrm{Sin}\theta\ \mathrm{Cos}\alpha+R\ \mathrm{Cos}\theta\ \mathrm{Sin}\alpha$

なる故に　$R\ \mathrm{Sin}\alpha=A_1$，$R\mathrm{Cos}\alpha=B_1$

$$R=\sqrt{A_1^2+B_1^2},\quad \mathrm{Tan}\ \alpha=\frac{A_1}{B_1}$$

である。

yを(3)式の形で表したときRのことをpを週期αを位相とする時系列（循環變動）の振幅と謂ふ。與へられたる時系列が若し殆んど正確に(3)式にて表されたとすれば其の振幅は其等の時系列の最大値と最小値との差の半分に殆んど等しいのである。

前例では　$p=8$ にして

$$y=1{,}554-34.5\ \mathrm{Cos}\frac{2\pi}{p}t-74\ \mathrm{Sin}\frac{2\pi}{p}t$$

$$R^2=A_1^2+B_1^2=(34.5)^2+(74)^2=6{,}666,\quad R=-81.65$$

$$\mathrm{Tan}\ \alpha=\frac{A_1}{B_1}=\frac{34.5}{74}=0.466,\quad \alpha=25^\circ$$

$$\therefore\ y=1554-81.6\ \mathrm{Sin}\ \left(\frac{2\pi}{p}t+25^\circ\right)$$

本例の時系列の最大値と最小値の差の半分は

$$(1641-1393)\div 2=124$$

にして此の値は上式の振幅 81.65 と可なりの差があるのである。

更に吾人は問題を一歩進めて任意の單位時間(例へば一年)の等間隔で測られた或る現象の觀測値を $u_0,\ u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots,\ u_p,\ \cdots\cdots$ とし此の時系列が p(例へば一年單位)なる週期を含むものと假定す。此の觀測値を次の如くp箇宛の列に分けて排列する。

	u_0	u_1	u_2	$\cdots\cdots u_{p-1}$
	u_p	u_{p+1}	u_{p+2}	$\cdots\cdots u_{2p-1}$
	$\cdots\cdots$			
	$u_{(m-1)p}$	$u_{(m-1)p+1}$	$u_{(m-1)p+2}$	$\cdots\cdots u_{mp-1}$
平均	v_0	v_1	v_2	$\cdots\cdots v_{p-1}$

上記の如くp箇宛の列に順次並べた排列に於て各縱の行毎に平均を求め $v_0,\ v_1,\ v_2,\ \cdots\cdots,\ v_{p-1}$ とするとき、mが相當大なる數とすれば pなる週期を有する項は約其の儘に殘存し、其の振幅は不變に殘るのであるが他の週期を有する項は平均されて其の振幅は殆んど零になるのである。以上の平均よりなれる系列 $v_0,\ v_1,\ v_2,\ \cdots\cdots,\ v_{p-1}$ を平均系列と名付くのである。

斯くしてmを相當大なる數とするとき平均系列の振幅を求めればそれが原系列 $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{p-1}, \ldots\ldots$ に於けるpなる週期の構成部分の振幅を示すことになるのである。

次に此の平均系列の振幅を求めんに

$$v=A_0+A_1\,\mathrm{Cos}\,\theta+B_1\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

但し　$\theta=\frac{2\pi}{p}t$　とす

而して

$t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ r,\ \ldots\ldots,\ p-1$　なるとき即ち

$\theta=0,\ \frac{2\pi}{p},\ \frac{4\pi}{p},\ \ldots\ldots,\ \frac{2\pi}{p}r,\ \ldots\ldots,\ \frac{2\pi(p-1)}{p}$　なるときvは

$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots\ldots,\ v_r,\ \ldots\ldots,\ v_{p-1}$　なる値をとるものとす。然るとき

$$A_0=\frac{1}{p}\sum_0^{p-1}v_r=\frac{1}{pm}\sum_0^{pm-1}u_r$$

$$A_1=\frac{2}{p}\sum v_r\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi}{p}r=\frac{2}{pm}\sum u_r\,\mathrm{Cos}\frac{2\pi}{p}r$$

$$B_1=\frac{2}{p}\sum v_r\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{p}r=\frac{2}{pm}\sum u_r\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{p}r$$

となるべし。而して平均系列の振幅は

$$R=\sqrt{A_1^2+B_1^2}$$

より得らるべし。

理論上の計算には

$$A_1 = \frac{2}{pm}\int_0^{pm} u(t)\,\mathrm{Cos}\,\frac{2\pi}{p}t\,dt$$

$$B_1 = \frac{2}{pm}\int_0^{pm} u(t)\,\mathrm{Sin}\,\frac{2\pi}{p}t\,dt$$

なる積分記號に依るを便とすべし。

第四　シユスターの方法に依る週期檢出法

趨勢的變動を除去せる一つの時系列の循環變動が夫々T、T′、T″等の週期を有する循環變動を含むものとす而して之等の週期は相互に接近せざる値とする。

今一つの循環變動が週期Tを有するものとし、然かもそれが次式の如く簡單に表されるものと假定す。

$$f(t) = R_T\,\mathrm{Cos}\left(\frac{2\pi}{T}t - c\right)$$

此のR_T、cは夫々此の循環變動の振幅及び位相を表すものとす。然るとき此の週期Tは必ずしも整數とは限らずして端數を伴ふであらう。今Tの値は未知であるがTに近い整數をpとし之を試みの週期とする。次に與へられたる時系列をu(t)とし前述の如くして原系列よりpを週期とする平均系列を作るとき其の縱の行の數mが相當大なるとき其の平均手續きに依りT以外の他の週期T′ T″等の持つ振幅は次第に小となるであらう。

然るに週期pはTに等しからざるを以つて上記の如くして得たる平均系列の振幅は原系列の振幅と等しからず。然れどもpがTに近いときは平均系列の振幅と原系列の振幅と大差ないのである。此のことに就いては次に證明するのである。更にpがTより遠ざかるとき平均系列の振幅が原系列の振幅に比し甚しく小となることを證明せんとす。

今簡單の爲めに　$\frac{2\pi}{T}=k,\ \frac{2\pi}{p}=g$　とす。

$$A_1=\frac{2}{pm}R_T\int_0^{pm}\mathrm{Cos}(kt-e)\,\mathrm{Cos}\ gt\ dt$$

$$B_1=\frac{2}{pm}R_T\int_0^{pm}\mathrm{Cos}(kt-e)\,\mathrm{Sin}\ gt\ dt$$

となり此の積分を計算すれば

$$\int_0^{pm}\mathrm{Cos}(kt-e)\,\mathrm{Cos}\ gt\ dt=\frac{1}{2}\int_0^{pm}\{\mathrm{Cos}(kt-gt-e)+\mathrm{Cos}(kt+gt-e)\}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{k-g}\mathrm{Sin}\,(kt-gt-e)+\frac{1}{k+g}\mathrm{Sin}\,(kt+gt-e)\Big]_0^{pm}$$

$$=\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{k-g}\mathrm{Sin}(kpm-gpm-e)+\frac{1}{k+g}\mathrm{Sin}(kpm+gpm-e)-\frac{1}{k-g}\mathrm{Sin}(-e)-\frac{1}{k+g}\mathrm{Sin}(-e)\Big\}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{k-g}\{\mathrm{Sin}\,(kpm-e)\,\mathrm{Cos}\,gpm-\mathrm{Cos}\,(kpm-e)\,\mathrm{Sin}\ gpm\}$$

$$+\frac{1}{k+g}\{\mathrm{Sin}\,(kpm-e)\,\mathrm{Cos}\ gpm+\mathrm{Cos}\,(kpm-e)\,\mathrm{Sin}\ gpm\}+\Big(\frac{1}{k-g}+\frac{1}{k+g}\Big)\mathrm{Sin}\ e\Big]$$

$$=\frac{k}{k^2-g^2}\{\mathrm{Sin}(kpm-e)+\mathrm{Sin}\ e\}$$

$$=\frac{2k}{k^2-g^2}\mathrm{Sin}\frac{kpm}{2}\mathrm{Cos}\left(\frac{kpm}{2}-e\right)$$

$$\therefore\quad A_1=\frac{2}{pm}R_T\frac{2\kappa}{k^2-g^2}\mathrm{Sin}\frac{kpm}{2}\mathrm{Cos}\left(\frac{kpm}{2}-e\right)$$

同様にして

$$B_1=-\frac{2}{pm}R_T\frac{2g}{k^2-g^2}\mathrm{Sin}\frac{kpm}{2}\mathrm{Sin}\left(\frac{kpm}{2}-e\right)$$

を得べし。依つて試みの振幅をR_pとすれば

$$R_p^2=A_1^2+B_1^2=\left(\frac{4}{pm}R_T\right)^2\left(\mathrm{Sin}\frac{kpm}{2}\right)^2\left\{\frac{k^2}{(k^2-g^2)^2}\mathrm{Cos}^2\left(\frac{kpm}{2}-e\right)+\frac{g^2}{(k^2-g^2)^2}\mathrm{Sin}^2\left(\frac{kpm}{2}-e\right)\right\}$$

今簡單の爲めに

$$\beta=\frac{k-g}{2}pm=\frac{gpm}{2}\left(\frac{k}{g}-1\right)=m\pi\left(\frac{k}{g}-1\right)$$

とす。然るとき

$$\mathrm{Sin}\frac{kpm}{2}=\mathrm{Sin}\left(\frac{k-g}{2}pm+\frac{g}{2}pm\right)=\mathrm{Sin}(\beta+m\pi)=(-1)^m\,\mathrm{Sin}\beta$$

之れを上式に代入すれば

$$(R_p/R_T)^2=\frac{16}{(k^2-g^2)^2p^2m^2}\mathrm{Sin}^2\beta\{k^2\mathrm{Cos}^2(\beta+m\pi-e)+g^2\mathrm{Sin}^2(\beta+m\pi-e)\}$$

$$=\left(\frac{\mathrm{Sin}\beta}{\beta}\right)^2\frac{4}{(k+g)^2}\{k^2\,\mathrm{Cos}^2(\beta-e)+g^2\,\mathrm{Sin}^2(\beta-e)\}$$

上式右邊の第二因子を見るに

$\frac{k}{g}=1+\delta$ と置けば。

$$\frac{4}{(k+g)^2}\{k^2\,\mathrm{Cos}^2(\beta-e)+g^2\,\mathrm{Sin}^2(\beta-e)\}$$

$$=\frac{4}{(k/g+1)^2}\left\{\left(\frac{k}{g}\right)^2\mathrm{Cos}^2(\beta-e)+1-\mathrm{Cos}^2(\beta-e)\right\}$$

$$=\frac{4}{(2+\delta)^2}\left[\{(1+\delta)^2-1\}\,\mathrm{Cos}^2(\beta-e)+1\right]$$

$$=\{1+(2\delta+\delta^2)\mathrm{Cos}^2(\beta-e)\}\Big/\left(1+\delta+\frac{\delta^2}{4}\right)$$

然るに試みの週期pが眞の週期Tに近いときはkとgが殆んど等しく從つてδは極めて小なる値をとり上記最後の式は1に近い値になり且つδが零に近い範圍内に於て多少變化しても尚此の式の値は1に近い値を保つのである。

之れに反して上式右邊の第一因子 $\mathrm{Sin}\beta/\beta$ の値は零に近いδの値の變化に依り可なり大なる影響を受けるのである。何故ならば

$$\beta = m\pi\left(\frac{k}{g} - 1\right) = m\pi\delta$$

であり、δの小なる變化はβの小なる變化であるがβが少し變つても$\mathrm{Sin}\beta/\beta$の値は絕對値が1より小であるが可なり變化すること次表の通りである。

β	$\left(\frac{\mathrm{Sin}\beta}{\beta}\right)^2$
0	1.00
$\frac{\pi}{6}$	0.91
$\frac{\pi}{3}$	0.69
$\frac{\pi}{2}$	0.40
$\frac{2}{3}\pi$	0.17
$\frac{5}{6}\pi$	0.04
π	0.00
$\frac{7}{6}\pi$	0.02
$\frac{3}{2}\pi$	0.04
2π	0.00
$\frac{5}{2}\pi$	0.02
3π	0.00

然るに

$$\delta = \frac{k}{g} - 1 = \frac{p}{T} - 1$$

であるからpがTに極めて近いときはδは零に近づき其の場合

$$(R_T/R_a)^2 = \left(\frac{\mathrm{Sin}\beta}{\beta}\right)^2$$

右邊の式は

$-\pi < \beta < \pi$ なる範圍即ち

$$-\pi < m\pi\left(\frac{k}{g}-1\right) < \pi$$

$$-\frac{1}{m} < \frac{p}{T} - 1 < \frac{1}{m}$$

即ち

$$T\left(1-\frac{1}{m}\right) < p < T\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

なる範圍内に於て上表に見る如く絶對値が1より小であるが相當大なる値を有し其の範圍以外では急に小となるのである。據つて試みの振幅 R_p は試みの週期 p が眞の週期 T に極めて近いときに限り大きく其の他の場合には極めて小となるのである。

吾々の取扱ひつゝある期間が週期を m 箇含むとき最大なる試みの振幅 R_p を與へる週期 p に對して眞の週期 T は上式から約

$$\frac{m}{m+1}p < T < \frac{m}{m-1}p$$

なる範圍内にあるのである。

シュスターの方法に依る週期檢出の算則

（一）　週期 T を發見するに何等かの方法に依り T に近いと看做される連續の整數 $p_1, p_2, p_3, \dots\dots$ を定める。

(二) 次に時系列中の數値を其の順序に p_1 箇横に並べ其の下に又 p_1 箇横に並べ斯くして次々に p_1 箇宛下に並べて行き例へば m 箇の列を作つたとす。

(三) 次に上記の平均系列を作る。

(四) 此の平均系列の振幅を上述の方法に依つて求める。

(五) 今試みの週期 p_1 に對する振幅を R_1、p_2 に對する振幅を R_2 等とす。次に試みの週期 p_1, p_2, ……を横軸に、振幅の平方 R_1^2, R_2^2, ……を縦軸にとりグラフを書く、之をシユスターは週期圖表 (Periodgraph) と名付けた。

(六) 週期圖表の最高頂(極大値)に對する p の値、換言すれば試みの振幅 R_p を最大とする p の値を眞の週期として採用するのである。

第五　東京及び多度津地方に於ける年降雨量のシユスターの方法に依る週期

本邦に於ける東京測候所及び四國多度津測候所の年降雨量は第一表の如し。

第一表　東京及び多度津年降雨量　（單位粍）

東京年降雨量						多度津年降雨量			
年次	降雨量	年次	降雨量	年次	降雨量	年次	降雨量	年次	降雨量
明治9年	1756	明治32	1649	大正11年	1411	明治26年	1037	大正5年	1035
10	1317	33	1188	12	1697	27	662	6	1126
11	1764	34	1589	13	1475	28	1118	7	1478
12	1493	35	1754	14	1713	29	1276	8	1295
13	1686	36	1912	昭和元年	1177	30	1256	9	1167
14	1444	37	1382	2	1445	31	1078	10	1352
15	1478	38	1330	3	1750	32	1250	11	1197
16	1553	39	1520	4	1909	33	1120	12	1714
17	1315	40	1640	5	1476	34	1061	13	855
18	1532	41	1692	6	1565	35	1472	14	1036
19	1286	42	1512	7	1690	36	1286	昭和元年	1059
20	1250	43	1751	8	1011	37	920	2	900
21	1379	44	1867	9	1247	38	1350	3	1132
22	1319	大正元年	1734	10	1660	39	1118	4	1090
23	1958	2	1597	11	1628	40	1208	5	877
24	1221	3	1694	12	1360	41	993	6	1434
25	1715	4	1927			42	1113	7	1095
26	1161	5	1931			43	1202	8	977
27	1321	6	1308			44	1311	9	838
28	1398	7	1337			大正元年	1204	10	1219
29	1374	8	1534			2	899	11	1013
30	1497	9	2194			3	1161	12	1099
31	1712	10	2025			4	1214		

註　本邦降雨量は口經二十糎の雨量計に依る觀測値にして若干粍にて示す。
本表の實數は昭和二年（一九二七年）迄は中央氣象臺刊行「本邦累年氣象表」に據り昭和三年以降昭和十二年（一九三七年）迄は中央氣象臺刊行「氣象要覽」に據るものである。

之等の東京地方に於ける年降雨量に關し明治九年乃至昭和十二年即ち六十二年間の資料、多度津地方に於ける年降雨量に關し明治二十六年乃至昭和十二年即ち四十五年間の資料に基き其等の循環變動の週期を夫々前述のシユスターの方法に依り求めんとす。

それには先づ兩地方に於ける年降雨量から趨勢變動を除去せる年降雨量の循環變動を求めざるべからず。依つて次に先づ兩地方に於ける趨勢變動を求めることゝする。

（一）東京及び多度津地方に於ける年降雨量の趨勢變動及び循環變動

計算の便宜上東京地方の年降雨量に就いては其の初年を除きたる明治十年乃至昭和十二年の六十一年間の年降雨量の明治四十年基準の趨勢直線の求めしに

$$y = 1{,}548.4 + 2.12x$$

となり一年分の增分二、一二粍は平均値一五四八、四粍に比し極めて小である。同様にして多度津地方に於ける明治二十六年乃至昭和十二年の四十五年間の年降雨量の大正四年基準の趨勢直線は

$$y = 1139.9 - 1.03x$$

となり一年分の減少分一、〇三粍を平均値一一三九、九粍に比し更に一層微少である。以上に據つて兩地方に於ける年降雨量の年々の趨勢變動は無視し得る程小にして且つ東京地方ではそれが增分となり多度津地方では減少分となつてゐる。據つて年降雨量に就いては兩地方とも其等の趨勢變動を無視して原系列の儘の資料を以つて其等の循環變動を示すものと看做した、斯くしても大なる間違ひがないであらう。

第二表　週期8年に對する東京年降雨量の平均系列計算表

	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
	1756粍	1317	1764	1493	1686	1444	1478	1553
	1315	1532	1286	1250	1379	1319	1958	1221
	1715	1161	1321	1398	1374	1497	1712	1649
	1188	1589	1754	1912	1382	1330	1520	1640
	1692	1512	1751	1867	1734	1597	1694	1927
	1931	1308	1337	1534	2194	2025	1411	1697
	1475	1713	1177	1445	1750	1909	1476	1565
	1690	1011	1247	1660	1623	1360	--	—
計	12,762	11,143	11,637	12,559	13,127	12,481	11,249	11,252
平均	1,595	1,393	1,455	1,570	1,641	1,560	1,607	1,607

次に一例として東京地方年降雨量に就いて試みの週期pを八年としてそれに對する振幅Rを求めんとす。

（二）試みの週期八年に對する東京地方年降量の循環變動の振幅

先づ原系列を八年毎に區切つて順次横に排列して平均系列を求めること上記第二表の通りである。

本表に於て各八年毎の年降雨量の各縱の行の計を等分して最後の列の平均即ち平均系列を求

めたのである。

此の平均系列からそれを表現する調和解析の式

$$y=A_0+A_1\mathrm{Cos}\theta+B_1\mathrm{Sin}\theta=A_0+R\mathrm{Sin}(\theta+\alpha)$$

に於て其の係數A_1, B_1, Rを求めんに其のA_1, B_1の値の計算は既に前述の第二、第三節に於て述べたのである。

即ち

$$A_1=-34.5,\quad B_1=-74.0$$

之れを用ひて振幅Rを求めんに

$$R^2=A_1^2+B_1^2=(-34.5)^2+(-74)^2=6{,}666,\quad R=-81.65$$

同様にして東京地方に於ける年降雨量の平均系列を前記第一表より求めれば次の第三表の通りである。尚試みの週期十六年以上三十五年迄の平均系列も求めたるが此處に省略せり。

此の第三表の各週期pに對する平均系列の最大項と最小項との値の差の半分を約各振幅に等しいと看做せば、それを吾人は各週期に對する豫想振幅と名付く、即ち

$$\text{豫想振幅}=\frac{1}{2}(\text{最大値}-\text{最小値})$$

第三表　東京年降雨量平均系列（粍）

週期 p	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1568	1481	1639	1595	1679	1525	1665	1527	1701	1625	1630
1	1508	1508	1372	1393	1422	1402	1635	1483	1805	1283	1489
2	1547	1661	1629	1455	1543	1606	1427	1669	1430	1688	1579
3	1488	1558	1544	1570	1472	1569	1620	1660	1488	1596	1450
4	1651	1587	1601	1641	1607	1709	1566	1693	1518	1548	1637
5		1528	1550	1560	1555	1619	1684	1430	1522	1482	1466
6			1523	1607	1401	1630	1414	1426	1568	1520	1539
7				1607	1607	1489	1516	1538	1502	1658	1653
8					1700	1406	1458	1653	1578	1485	1642
9						1593	1558	1515	1589	1556	1531
10							1497	1481	1596	1480	1593
11								1625	1303	1669	1501
12									1527	1635	1410
13										1526	1371
14											1786

上記の式に依つて前掲第三表の平均系列から東京地方の年降雨量の各週期に對する豫想振幅を算出すれば次表の如し。

第四表　東京降雨量豫想振幅

週期 P	豫想振幅
5	82 毛
6	90
7	134
8	124
9	150
10	154
11	135
12	134
13	251
14	203
15	208
16	157
17	189
18	232
19	207
20	236
21	298
22	271
23	277
24	296
25	347
26	381
27	258
28	368
29	337
30	400
31	352
32	269
33	364
34	268
35	267

此の豫想振幅中の極大値に對する試みの週期を大畧眞に近い週期とすれば、それは10,13,21,26,30,33年等であるが此の内十年及び十三年が短期に於ける眞に近い週期と看做され21,26,30年は十年、十三年の約倍數なる故に採らず。長期として三十三年が眞に近い週期と看做され然かもそれはムウア教授調査の米國オハイオ流域の長期的週期と一致す。

斯如く一般に豫想振幅に依つて、それが大略の値に過ぎないが、簡單に眞に近い週期が一應見出されるのである。

次に上述の豫想振幅に依る週期を参考として前記東京地方年降雨量の各週期に對する平均系列に基きシュスターの方法に依り A_p^2, B_p^2, R_p^2 を求め以つて東京地方年降雨量の眞に近い週期を検出すべし。之等の計算は可なり面

倒であるが次に一括して其の結果のみを掲げれば次表の如し。

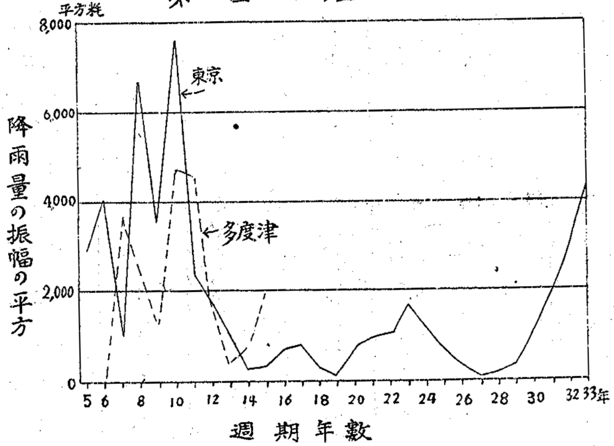
第五表　東京年降雨量週期檢出表

試みの週期 P	A_i^2	B_i^2	R_p^2
5	1,239	1,632	2,871
6	3,758	246	4,004
7	562	346	908
8	1,190	5,476	6,666
9	2,134	1,296	3,430
10	6,022	1,600	7,622
11	557	1,731	2,288
12	428	1,310	1,739
13	912	38	950
14	12	246	258
15	132	193	325
16	121	480	601
17	576	154	730
18	174	85	259
19	14	59	73
20	331	458	789
21	467	400	867
22	762	196	958
23	1,568	36	1,604
24	824	372	1,196
25	185	449	634
26	1	210	211
27	1	10	11
28	17	90	107
29	2	331	333
30	130	1,063	1,193
31	548	1,332	1,880
32	1,608	1,529	3,137
33	2,841	1 482	4,323

此の第五表に依り横軸に週期pをとり縱軸に振幅の平方R_p^2をとり畫けるグラフ所謂シュスターの週期圖表を畫けば第一圖の如し。此の圖の最高頂に對する週期十年が確に眞に近い週期なりと認められるも、長期的週期として二十三年、三十三年が其の振幅の平方の大なることから眞に近い週期なるや否やは資料不充分の爲め斷言するを得ず殊に三十一年以降の場合、平均系列作成に際し單なる二列の平均に過ぎず然かも第五表に於て省略したるも試みの週期三十四年、三十五年に對する振幅の平方が夫々五一七二、六三五三となり三十三年に對する振幅の平方が極大値にあらず。依つてシュスターの方法に依り長期的週期が三十三年であると確言するを得ず。併

し乍ら前述の豫想振幅に依り其の長期的週期が三十三年なりと推定され、且つ後述の相關比に依る週期檢出法に依つても長期的週期が三十三年なることが認められ、又前述の如くにムウア教授調査の米國オハイオ流域の年降雨量の長期的週期も三十三年であり、且つブルックナー(Blückner)氏が世界に亘る年降雨量の材料よりの週期を算出せる結果が三十五年であることより見て、大約三十三年が東京地方降雨量の長期的週期と看做すことが妥當であらう。以上に據り東京地方年降雨量の眞に近い週期が十年及び三十三年なることが發見されたのである。

第一圖　降雨量の週期表



次に同樣の方法に依つて四國多度津地方に於ける年降雨量の週期を檢出する爲め、各試みの週期に對する平均系列を求め(此處に其の平均系列を掲げることを省略す)其の最大値と最小値の半分たる豫想振幅を算出すれば次の如し。

多度津地方年降雨豫想振幅

試みの週期	豫想振幅
6	111
7	88
8	172
9	140
10	202
11	138
12	175
13	224
14	158
15	186

右表に於て見る如く多度津地方年降雨量にても前述の東京地方と同樣十年及び十三年が豫想振幅極大にして、此の內何れかゞ眞に近い週期なることが推定される。

次に多度津地方年降雨量に就いてシュスターの方法に依る振幅の平方に基く週期檢出表を作成すれば次の如し

試みの週期 P	A_1^2	B_1^2	R_p^2
6	22	64	86
7	3,238	213	3,451
8	1,665	433	2,098
	445	666	1,111
10	61	4,597	4,659
11	4,503	76	4,578
12	900	756	1,656
13	324	30	354
14	40	645	685
15	177	1,832	2,009

之れに依り前述と同様横軸に試みの週期をとり、縦軸に振幅の平方をとり畵ける週期圖表(第一圖)の最高頂に對する週期を見ることに依り多度津地方に於ても年降雨量の眞に近い週期が十年であることを確言し得るのである。次に更に長期に亘る週期は多度津地方降雨量が明治二十六年より昭和十二年迄の資料を得るに過ぎざるを以つて東京地方の場合よりも一層其の正確値を求め得ず。

以上の所論より得られる十年及び三十三年を週期とする東京地方年降雨量の循環變動式及び十年を週期とする多度津地方年降雨量の循環變動式を示せば次の通りである。

東京年降雨量の十年を週期とする循環變動式

$$y = f(t) = 1{,}555 - 77.6\ \mathrm{Cos}\frac{2\pi}{10}t + 40\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{10}t$$

$$= 1{,}555 + 87.3\,\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi}{10}t + 297^\circ 20'\right)$$

東京年降雨量の十年及び三十三年を週期とする循環變動式(第二圖參照但し斜め點線は趨勢線を示す)

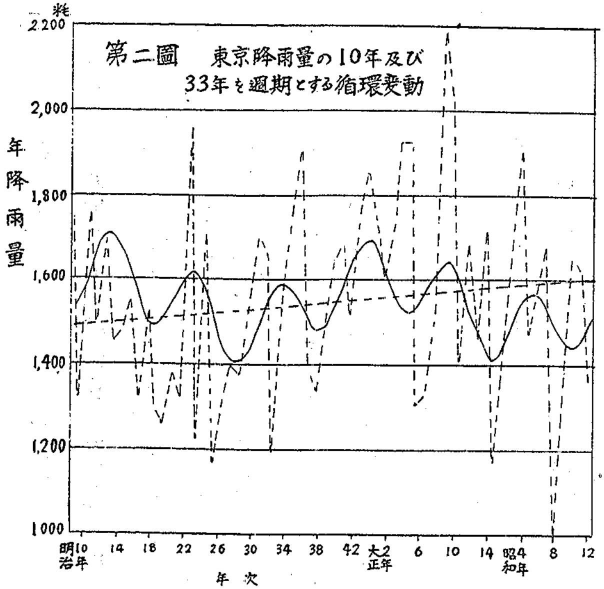
$$y = 1{,}554 + 87.3\,\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi}{10}t + 297^\circ 20'\right) + 65.7\,\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi}{33}t + 54^\circ 10'\right)$$

多度津年降雨量の十年を週期とする循環變動式(第三圖參照)

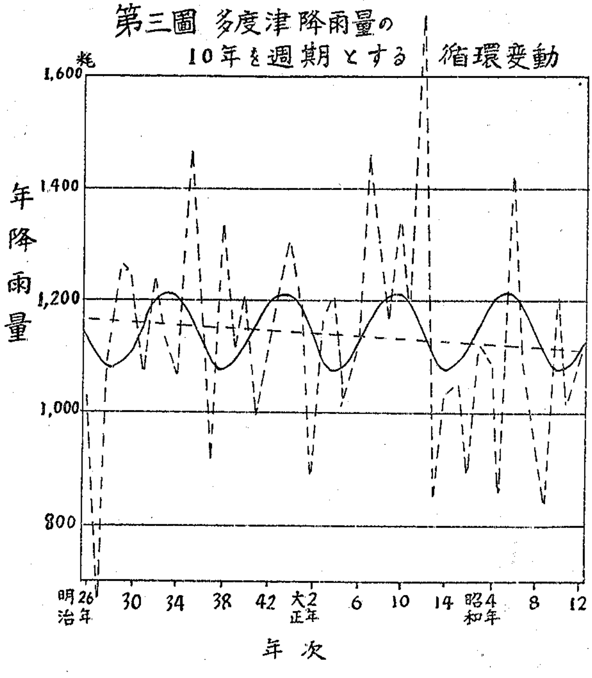
$$y = 1{,}146 - 7.8\ \mathrm{Cos}\frac{2\pi}{10}t - 67.8\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{10}t$$

$$= 1{,}146 - 68.2\,\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi}{10}t + 6^\circ 30'\right)$$

第二圖 東京降雨量の10年及び33年を週期とする循環變動



第三圖 多度津降雨量の10年を週期とする循環變動



第六　相關比に依る週期檢出法

先づ原時系列(其の趨勢變動を除去せる循環變動)を

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots \qquad (1)$$

とし試みの週期をpとし前述の如く平均系列を作るに

$$\begin{array}{llllll}
 & u_0 & u_1 & u_2 & \cdots\cdots & u_{p-1} \\
 & u_p & u_{p+1} & u_{p+2} & \cdots\cdots & u_{2p-1} \\
 & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\
 & u_{(m-1)p} & u_{(m-1)p+1} & u_{(m-1)p+2} & \cdots\cdots & u_{mp-1} \\
\hline
\text{計} & U_0 & U_1 & U_2 & \cdots\cdots & U_{p-1} \\
\text{平均} & v_0 & v_1 & v_2 & \cdots\cdots & v_{p-1}
\end{array}$$

以上の如く時系列の各項を順次p箇宛排列するものとす。今時系列の各項の總和をmpとすればm箇の列を得べし。之等の縱の行の各々の和を$U_0, U_1, U_2, \cdots\cdots, U_{p-1}$としそれをmにて除したる平均を$v_0, v_1, v_2, \cdots\cdots, v_{p-1}$とす。

此の平均系列vの標準偏差を原系列Uの標準偏差にて除した比を以つて此等の間の相關比ηとするを得べし。

試みの週期 pの種々の値に對して夫々の相關比を計算し、pを横軸に、ηを縱軸にとり畫けるグラフが此の場合の週期圖表である。

斯如く平均系列の標準偏差を原系列の標準偏差にて除したる相關比に依つて週期を檢出し得ることは明である。何故ならば上記平均系列表の横列の行程に於て週期pなる處の系列の部分は一つの完全なる週期變動の位相を悉く通過する。それ故に此の週期的部分の同一の縱の行に於ける互に上或は下にある總べての項は同一の位相にあるのである。即ち$u_r, u_{p+r}, u_{2p+r}, \ldots\ldots, u_{(m-1)p+r}$ なる項は同一の位相にあるのである。據つて週期pなる系列の部分は$U_0, U_1, U_2, \ldots\ldots, U_{p-1}$なる列に於て倍の振幅にて顯はれるのである。從つて$V_0, V_1, V_2, \ldots\ldots, V_{p-1}$なる平均系列にては夫自身の適當なる振幅にて顯はれるのである。

他方に於て偶發的混亂或は所期のpより異なれる週期を有する變動よりの週期的混亂は平均系列を作成する平均手續に依り大に弱めらるべし。

據つて時系列に於て週期pなる週期性の存在するとき其の平均系列の標準偏差が其の系列に於て此の週期の週期性の存在せざるときよりも大なる値を有するであらう。斯くして種々の試みの週期pに對する平均系列の標準偏差を原系列の標準偏差にて除したる相關比の最大値に對する週期pが眞の週期に近い値であらう。之等のことに就いて次に證明しよう。

眞の週期の近傍に於ける週期圖表

時系列U_xの項が週期pの簡單なる週期的變動部分より成立するものとす。即ち主として

$$a\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{T}x$$

なる函数の形を成すものとし、且つそれに此の週期を含まざる部分b_xを伴ふものとす。即ち

$$u_x = a\,\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{T}x + b_x$$

σをuの標準偏差とし、σ_bをb_xの標準偏差とす。

然るとき系列

$$0,\ \mathrm{Sin}\frac{2\pi}{T},\quad \mathrm{Sin}\frac{4\pi}{T},\quad \mathrm{Sin}\frac{6\pi}{T},\quad \cdots\cdots$$

の標準偏差は$\frac{1}{\sqrt{2}}$である。何故ならば三角法に依つて

$$\frac{1}{n}\Sigma\,\mathrm{Sin}^2\frac{2\pi}{T}x = \frac{1}{n}\Sigma\left(1-\mathrm{Cos}^2\frac{2\pi}{T}x\right) = 1-\frac{1}{n}\Sigma\,\mathrm{Cos}^2\frac{2\pi}{T}x = \frac{1}{2}$$

であるからである。而して上記(1)式の第一項と第二項との間に相關々係なきを以つて

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}a^2 + \sigma_b^2$$

今　$U_x = u_x + u_{p+x} + \cdots\cdots + u_{(m-1)p+x}$

として表され

$$B_x = b_x + b_{p+x} + \cdots\cdots + b_{(m-1)p+x}$$

とす。然るとき

$$U_x = a\left\{\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{T}x + \mathrm{Sin}\frac{2\pi}{T}(p+x) + \cdots\cdots + \mathrm{Sin}\frac{2\pi(m-1)p+2\pi x}{T}\right\} + B_x$$

三角法に依り上式は

$$U_x = a\frac{\mathrm{Sin}\frac{m\pi p}{T}}{\mathrm{Sin}\frac{\pi p}{T}}\mathrm{Sin}\left\{\frac{2\pi}{T}x + \frac{(m-1)\pi p}{T}\right\} + B_x$$

Σ をUの標準偏差とし Σ_B をBの標準偏差とすれば σ を算出するときと同一の方法に依り

$$\Sigma^2 = \frac{a^2}{2}\frac{\mathrm{Sin}^2\frac{m\pi p}{T}}{\mathrm{Sin}^2\frac{\pi p}{T}} + \Sigma_B^2$$

但し　$\Sigma_B^2 = m\sigma_b^2$

次に Σ_V を平均系列の標準偏差とす。然るとき

$$\Sigma_V^2 = \frac{1}{m^2}\Sigma^2$$

$$= \frac{a^2}{2m^2}\frac{\mathrm{Sin}^2\frac{m\pi p}{T}}{\mathrm{Sin}^2\frac{\pi p}{T}} + \frac{1}{m}\sigma_b^2$$

之れより平均系列の標準偏差 Σ_V と原系列の標準偏差 σ との比 γ を相關比とすれば

$$\eta^2 = \Sigma_v^2/\sigma^2 = \left\{\frac{a^2}{2m^2}\frac{\mathrm{Sin}^2 m\pi p}{\mathrm{Sin}^2 \frac{\pi p}{T}} + \frac{1}{m}\sigma_b^2\right\} \Big/ \left(\frac{1}{2}a^2 + \sigma_b^2\right)$$

之れが週期pと相關比ηとが直角座標にとられるときの週期圖表の方程式である。更に詳しく述べれば觀察値を無限數とるときの週期圖表の方程式である。併し乍らかゝる觀察値を無限數とることは不可能にして實際に若し充分多數の觀察値が得られるならばmが約一〇以上になるように取るべきである。

上の方程式より明なる如くかゝる多數のmの値に對してpが殆んど1に等しい場合の外はηは小なる分數の値をとるのである。

次にp＝T(1―δ)とす。但しδは小なる數とす。δが零に近づくに從ひ上式のη²の値は次の値になるのである。

$$\eta^2 \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{m}\sigma_b^2}{\frac{1}{2}a^2 + \sigma_b^2}$$

而してmが大數なるに從ひ上式の値は殆んど

$$1 \div \left(1 + \frac{2}{a^2}\sigma_b^2\right)$$

になるのである。此の値はσ_bが小なるときは1に極めて近い値である。而してδが正負の何れの方向に零より離れても此の値は急に1より距りたる値をとるのである。

pの値が

$$\frac{m\pi p}{T} = m\pi \pm \frac{3}{2}\pi$$

に依つて與へられる値に到る迄の間にηの最大値が存在するのである。

$$\frac{p}{T} = 1-\delta$$

之れを上式に代入すれば

$$m\pi(1-\delta) = m\pi \pm \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore\ \delta = \pm\frac{3}{2m}$$

即ちδが此の値に殆んど等しいときにηの値の最大値があるのである。

$$\therefore\ \frac{p}{T} = 1 \pm \frac{3}{2m}$$

$$\therefore\ \frac{2m}{2m+3}p < T < \frac{2m}{2m-3}p$$

なる範圍内に眞の週期が存在するのである。

第七　東京及び多度津地方に於ける年降雨量の相關比に依る週期

前記の東京地方に於ける年降雨量の平均系列表(第三表)の實數に基き各平均系列の標準偏差を求め、それを原系列の標準偏差にて除し其等の間の各相關比を求め其の最大値に對する週期を以つて東京地方年降雨量の眞に近

き週期と爲さんとす。

次に一例として東京地方年降雨量に於て試みの週期十年に對する標準偏差を求め、それを原系列の標準偏差にて除し、其の場合の相關比を求める計算を示さう。

試みの週期十年(東京)の平均系列の標準偏差計算表

年次	降雨量平均系列 F	$f=F-M$	f^2
0	1,525粍	—30	900
1	1,402	—153	23,409
2	1,606	51	2,601
3	1,569	14	196
4	1,709	154	23 716
5	1,619	64	4,096
6	1,630	75	5,625
7	1,489	—66	4,356
8	1,406	—149	22,201
9	1,593	38	1,444
計	15,548	—398	88,544
平均	M=1,555	396 / —2	

平均系列の標準偏差

$$\Sigma'_v=\sqrt{\frac{88,544}{10}}=94.1$$

原系列の六十二年間に亘る東京地方年降雨量の標準偏差σを同様にして求めれば

$$\sigma=240.1$$

之れに依つて試みの週期十年に對する東京地方年降雨量の相關比を求めれば

$$\eta=\frac{1}{\sigma}\Sigma_r=\frac{94.1}{240.1}=0.392$$

同様の方法に依つて試みの週期六年乃至三十四年の東京地方降雨量の各平均系列の標準偏差に對する原系列の標準偏差の割合たる相關比を求めし結果次の如し。

東京地方年降雨量の相關比

試みの週期	標準偏差 (1)	相關比 (1)÷240.1
6	58.7	0.244
7	83.8	0.349
8	79.7	0.332
9	100.1	0.417
10	94.1	0.392
11	90.3	0.376
12	92.7	0.386
13	116.5	0.485
14	102.2	0.426
15	105.4	0.439
16	91.8	0.382
17	106.3	0.443
18	128.8	0.536
19	123.8	0.516
20	138.0	0.575
21	137.1	0.571
22	134.5	0.560
23	152.6	0.636
24	145.8	0.607
25	148.3	0.618
26	161.4	0.672
27	132.1	0.550
28	146.3	0.609
29	154.0	0.641
30	172.3	0.718
31	169.5	0.706
32	149.0	0.621
33	181.2	0.755
34	147.0	0.612

之れに依れば相關比の極大値に對する週期は 13, 23, 26, 30, 33 年であるが此の内眞に近い週期として十三年

及び三十三年が採用され得べし。

次に多度津地方の昭和十二年以前の四十五年間に亘る前掲年降雨量の標準偏差を求めしに

原系列(多度津)標準偏差　$\sigma = 190.5$

而して前述と同様の方法に依り試みの週期六年乃至十五年に對する各平均系列の標準偏差を求め上記の原系列の標準偏差にて除して多度津地方に於ける年降雨量の各相關比を求めし結果次の如し。

多度津地方年降雨量の相關比

試みの週期	標準偏差（1）	相關比 (1)÷190.5
6	74.3	0.390
7	70.4	0.370
8	99.1	0.520
9	79.2	0.416
10	104.0	0.546
11	74.7	0.392
12	103.7	0.544
13	124.4	0.653
14	86.7	0.455
15	100.7	0.529

之れに依り多度津地方に於ても相關比の極大値に對する週期は十三年なるを知るべし。

斯くして東京及び多度津地方に於ける年降雨量の各試みの週期に對する相關比は短期にては兩者とも十三年が

最大である。然るに前述のシュスターの方法に依れば兩地方に於ける年降雨量の眞に近き週期は短期に於ては共に十年であり相關比の方法に依れば上述の如く十三年が眞に近き週期と認めらる。何れが妥當であらうか。それを實證的に檢する爲め兩者の場合の平均誤差及び標準誤差を算出することにした。それには東京地方年降雨量の週期十年及び十三年に對するフーリエ曲線

$$y=1555+87.3\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi}{10}t+297^\circ 20'\right)$$

$$y=1548+30.8\mathrm{Sin}\left(\frac{2\pi}{13}t+78^\circ 20'\right)$$

に於ける各年次に對する値を求めそれと原系列との差の絶對値の和の平均たる平均誤差及び差の平方の平均を平方に開きたる標準誤差を求めたのである。此處に其の計算表を省き其の結果のみを掲げれば

東京地方年降雨量の週期十年に對する平均誤差 193 にして標準誤差 232 であり、同地方の週期十三年に對する平均誤差 196 標準誤差 239 である。

同樣に多度津地方年降雨量の週期十年に對する平均誤差 140 にして標準誤差 183 であり、同地方の週期十三年に對する平均誤差 143 にして標準誤差 191 である。

斯如く東京、多度津兩地方に於て夫々の原系列と週期變動式に依る値との差に就いての平均誤差及び標準誤差が共に週期十年の方が週期十三年より小である。據つてシュスターの方法に依り吾人の算出せる東京、多度津地

方年降雨量の週期十年が短期に於て眞に近き週期なることを確言し得るのである。

長期的週期として東京地方に於て相關比の週期檢出の方法に依り三十三年が眞に近き週期なりと認められたるが此の場合の平均系列作成の際各平均すべき項が前述の如く二箇宛に過ぎずして確に之れが眞に近き週期なりと斷言するを得ざれ共ムウア教授の求めた米國オハイオ流域の降雨量の長期的週期と一致するを以つて此の三十三年が東京地方年降雨量の週期と看做すを得べし。

第八　結　び

本邦内地の各地方に於て夫々地勢を異にし、氣象を異にするを以つて吾人の單なる二地方たる東京、多度津地方の降雨量の週期を以つて本邦内地に於ける各地方ともに適用される降雨量の週期と看做すに少からぬ危險を感ずるも吾人の調査せる二つの地域が可なり距りたる地方であり、地勢を異にするにも拘らず兩地方の降雨量の週期が共に一致せるを以つて本邦内地に於ける降雨量の週期も約十年及び三十三年なりと推定せられるのである。

斯くして吾人は週期檢出の方法としてシュースターの方法即ち週期的變動の振幅の平方に據るものと相關比に據るものに就いて其の理論を述べ併せて東京及び多度津地方降雨量の週期檢出の例を擧げ本邦降雨量の週期が十年及び三十三年なることを發見せる過程を述べた。

以上の週期決定の理論に於て何れの方法に依るも平均系列を算出するに當りそれが多數の列の平均たるを要し從つて多年に亘る觀察値を得て始めて眞に近き週期を定め得るのである。然るに吾人の本邦降雨量の場合には資

料乏しく之等に依る長期的週期の檢出に際しては大畧の値より得られざりしが短期的週期に就いては之れも充分なる資料より得られたりとは言ひ難きも大約妥當なる週期を得たと信ずるのである。

最後にシュスターの方法と相關比に依る方法と何れが優れるやは、前者が原系列に簡單なる週期函數が當欲まるものと假定して其の振幅を求め以つて眞に近き週期を決定するに反し、後者は何等の假定なしに原系列の平均系列其の儘の數列の標準偏差を求め、それと原系列の標準偏差との比即ち相關比を求め、之れに據り眞に近き週期を決定する方法にして、シュスターの方法が計算少しく煩雜なるも週期檢出に鋭敏性を有するに對し相關比に依る方法は計算簡單なるも其處に何等假定のないだけそれだけ週期檢出に多少鈍重なる嫌ひあり。據つてシュスターの方法は原系列が比較的單純なる週期を保有する場合に適當なる方法と謂ふべく、然らざる多數の週期的變動の合成された複雜なる時系列に對しては相關比に依る方法が適するであらう。斯如く兩法に於て一長一短を有するも週期檢出の方法として何れも代表的の方法と謂ふべし。

本稿の參考書次の通りであり

一、蜷川虎三著經濟循環期の統計的研究（ヘンリー・エル・ムウア原著譯）
二、小倉金之助著述、統計學上（經濟學全集第三十五卷）
三、Whittaker & Robertson : The calculus of observation